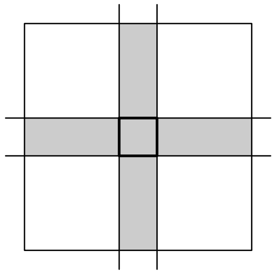
6 класс

6.1. В числовом примере АБВ+9 = ГДЕ буквы А, Б, В, Г, Д и Е обозначают шесть разных цифр. Какая цифра обозначена буквой Д?

6.2. Прямые, параллельные сторонам квадрата, образуют квадратик, центр которого совпадает с центром исходного квадрата. Известно, что площадь креста, образованного квадратиком (см. рис. справа) в 17 раз больше площади квадратика. А во сколько раз площадь исходного квадрата больше площади квадратика?



6.3. Мальчики принесли в класс конфеты и раздали их девочкам. Петя сказал, что он принёс ровно половину общего числа конфет. Коля сказал, что он принёс ровно треть общего числа конфет, и отдал свои конфеты только Маше и Тане, причём Маше досталось на 3 конфеты больше, чем Тане. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

6.4. Вася выписал на доску 999 произведений: $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, ..., $999 \cdot 1000$. Верно ли, что сумма каких-то двух из этих произведений равна 20000?

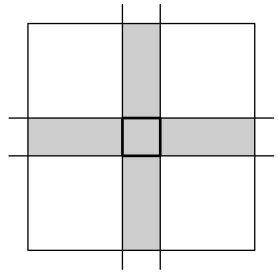
6.5. В комнате 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Первый сказал: «В этой комнате по крайней мере 1 лжец». Второй сказал: «В этой комнате по крайней мере 2 лжеца». Третий сказал: «В этой комнате по крайней мере 3 лжеца». И так далее до десятого, который сказал: «В этой комнате все лжецы». Сколько лжецов могло быть среди этих 10 человек?

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

6 класс

6.1. В числовом примере АБВ+9 = ГДЕ буквы А, Б, В, Г, Д и Е обозначают шесть разных цифр. Какая цифра обозначена буквой Д?

6.2. Прямые, параллельные сторонам квадрата, образуют квадратик, центр которого совпадает с центром исходного квадрата. Известно, что площадь креста, образованного квадратиком (см. рис. справа) в 17 раз больше площади квадратика. А во сколько раз площадь исходного квадрата больше площади квадратика?



6.3. Мальчики принесли в класс конфеты и раздали их девочкам. Петя сказал, что он принёс ровно половину общего числа конфет. Коля сказал, что он принёс ровно треть общего числа конфет, и отдал свои конфеты только Маше и Тане, причём Маше досталось на 3 конфеты больше, чем Тане. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

6.4. Вася выписал на доску 999 произведений: $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, ..., $999 \cdot 1000$. Верно ли, что сумма каких-то двух из этих произведений равна 20000?

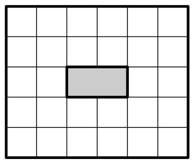
6.5. В комнате 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Первый сказал: «В этой комнате по крайней мере 1 лжец». Второй сказал: «В этой комнате по крайней мере 2 лжеца». Третий сказал: «В этой комнате по крайней мере 3 лжеца». И так далее до десятого, который сказал: «В этой комнате все лжецы». Сколько лжецов могло быть среди этих 10 человек?

7 класс

7.1. Расставьте по кругу 6 ненулевых цифр (не обязательно различных) так, чтобы каждая из них равнялась последней цифре суммы своих соседей.

7.2. Петя, Коля и Вася собирали грибы. Петя сказал, что он нашёл на 7 грибов меньше, чем суммарно нашли Коля и Вася, а Коля сказал, что он нашёл на 10 грибов меньше, чем суммарно нашли Петя и Вася. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

7.3. Из клетчатого прямоугольника 6×5 вырезали в центре прямоугольник 2×1, как показано на рисунке. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на 6 треугольников?



7.4. В десятичной записи 13 чисел используется одна и та же цифра N и не используются никакие другие цифры. Может ли сумма этих чисел равняться 8900098?

7.5. По кругу стоят 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Каждый из стоявших сказал: «У меня есть сосед лжец». Найдите минимальное возможное число лжецов среди этих 100 человек.

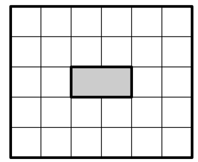
XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

7 класс

7.1. Расставьте по кругу 6 ненулевых цифр (не обязательно различных) так, чтобы каждая из них равнялась последней цифре суммы своих соседей.

7.2. Петя, Коля и Вася собирали грибы. Петя сказал, что он нашёл на 7 грибов меньше, чем суммарно нашли Коля и Вася, а Коля сказал, что он нашёл на 10 грибов меньше, чем суммарно нашли Петя и Вася. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

7.3. Из клетчатого прямоугольника 6×5 вырезали в центре прямоугольник 2×1, как показано на рисунке. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на 6 треугольников?



7.4. В десятичной записи 13 чисел используется одна и та же цифра N и не используются никакие другие цифры. Может ли сумма этих чисел равняться 8900098?

7.5. По кругу стоят 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Каждый из стоявших сказал: «У меня есть сосед лжец». Найдите минимальное возможное число лжецов среди этих 100 человек.

8 класс

8.1. Четырём девочкам дали конфеты. Маша сказала: «У нас с Катей на 12 конфет больше, чем у Лены с Олей», а Катя сказала: «У нас с Леной на 7 конфет меньше, чем у Маши с Олей». Докажите, что одна из девочек ошиблась.

8.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля — треть, а Вася — пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что Вася не играл ни с Петей, ни с Колей?

8.3. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны соответственно точки D, E и F так, что $BE = BD$ и $AF = AD$. Известно, что ED — биссектриса угла BEF. Докажите, что FD — биссектриса угла AFE.

8.4. Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?

8.5. На шахматную доску 8×8 поставили k ладей и k коней так, что ни одна из фигур не бьёт никакую другую. При каком наибольшем k такое возможно?

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

8 класс

8.1. Четырём девочкам дали конфеты. Маша сказала: «У нас с Катей на 12 конфет больше, чем у Лены с Олей», а Катя сказала: «У нас с Леной на 7 конфет меньше, чем у Маши с Олей». Докажите, что одна из девочек ошиблась.

8.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля — треть, а Вася — пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что Вася не играл ни с Петей, ни с Колей?

8.3. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны соответственно точки D, E и F так, что $BE = BD$ и $AF = AD$. Известно, что ED — биссектриса угла BEF. Докажите, что FD — биссектриса угла AFE.

8.4. Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?

8.5. На шахматную доску 8×8 поставили k ладей и k коней так, что ни одна из фигур не бьёт никакую другую. При каком наибольшем k такое возможно?

9 класс

9.1. Даны положительные числа p и r. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — линейные функции с корнями p и r. Найдите все корни уравнения $f(x)g(x) = f(0)g(0)$.

9.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля — треть, а Вася — пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что по крайней мере в двух играх не участвовали ни Вася, ни Петя, ни Коля?

9.3. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O (B и C — точки касания). Пусть M — середина отрезка AO. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается прямой AC.

9.4. К числу A, состоящему из восьми ненулевых цифр, прибавили семизначное число, состоящее из одинаковых цифр, и получили восьмизначное число B. Оказалось, что число B может быть получено из числа A перестановкой некоторых цифр. На какую цифру может начинаться число A, если последняя цифра числа B равна 5?

9.5. На клетчатой доске 8×8 размещены 8 клетчатых кораблей размера 1×3 так, что ни у каких двух клеток, занятых разными кораблями, нет общих точек. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить хотя бы один корабль?

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

9.1. Даны положительные числа p и r. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — линейные функции с корнями p и r. Найдите все корни уравнения $f(x)g(x) = f(0)g(0)$.

9.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля — треть, а Вася — пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что по крайней мере в двух играх не участвовали ни Вася, ни Петя, ни Коля?

9.3. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O (B и C — точки касания). Пусть M — середина отрезка AO. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается прямой AC.

9.4. К числу A, состоящему из восьми ненулевых цифр, прибавили семизначное число, состоящее из одинаковых цифр, и получили восьмизначное число B. Оказалось, что число B может быть получено из числа A перестановкой некоторых цифр. На какую цифру может начинаться число A, если последняя цифра числа B равна 5?

9.5. На клетчатой доске 8×8 размещены 8 клетчатых кораблей размера 1×3 так, что ни у каких двух клеток, занятых разными кораблями, нет общих точек. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить хотя бы один корабль?

10 класс

10.1. Пусть $f(x) = x^2 + 2ax + b$. Известно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня. Докажите, что тогда при любом положительном k уравнение $f(x) + k(x + a)^2 = 0$ также имеет два корня.

10.2. Окружность, проходящая через вершины A, B, D трапеции $ABCD$, пересекает её боковую сторону CD в точке K. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BCK, касается прямой AB.

10.3. На клетчатой доске 8×8 размещён 1 клетчатый корабль размера 1×3. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить корабль?

10.4. Верно ли, что любое чётное число, большее 1000, можно представить в виде

$$n(n+1)(n+2) - m(m+1),$$

где m и n — натуральные числа?

10.5. Можно ли выбрать число $n \geqslant 3$ и так заполнить таблицу $n \times n$ различными натуральными числами от 1 до n^2, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

10.1. Пусть $f(x) = x^2 + 2ax + b$. Известно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня. Докажите, что тогда при любом положительном k уравнение $f(x) + k(x + a)^2 = 0$ также имеет два корня.

10.2. Окружность, проходящая через вершины A, B, D трапеции $ABCD$, пересекает её боковую сторону CD в точке K. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BCK, касается прямой AB.

10.3. На клетчатой доске 8×8 размещён 1 клетчатый корабль размера 1×3. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить корабль?

10.4. Верно ли, что любое чётное число, большее 1000, можно представить в виде

$$n(n+1)(n+2) - m(m+1),$$

где m и n — натуральные числа?

10.5. Можно ли выбрать число $n \geqslant 3$ и так заполнить таблицу $n \times n$ различными натуральными числами от 1 до n^2, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

11 класс

11.1. Известно, что
$$\sin x\cos y=\cos x\sin y=\frac{1}{2}\,.$$
Найдите $\cos 2x-\sin 2y$.

11.2. Числа x и y удовлетворяют неравенству $x>y>\frac{2}{x-y}$. Докажите, что $x^2>y^2+4$.

11.3. Около основания n-угольной пирамиды можно описать окружность. Известно, что центр этой окружности равноудалён от всех середин боковых рёбер пирамиды. Докажите, что длины всех боковых рёбер пирамиды равны.

11.4. Верно ли, что любое делящееся на 6 число, большее 1000, можно представить в виде
$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-m(m+1)(m+2),$$
где m и n — натуральные числа?

11.5. Можно ли выбрать число $n\geqslant 3$ и так заполнить таблицу $n\times(n+3)$ (n строк и $n+3$ столбца) различными натуральными числами от 1 до $n(n+3)$, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

11.1. Известно, что
$$\sin x\cos y=\cos x\sin y=\frac{1}{2}\,.$$
Найдите $\cos 2x-\sin 2y$.

11.2. Числа x и y удовлетворяют неравенству $x>y>\frac{2}{x-y}$. Докажите, что $x^2>y^2+4$.

11.3. Около основания n-угольной пирамиды можно описать окружность. Известно, что центр этой окружности равноудалён от всех середин боковых рёбер пирамиды. Докажите, что длины всех боковых рёбер пирамиды равны.

11.4. Верно ли, что любое делящееся на 6 число, большее 1000, можно представить в виде
$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-m(m+1)(m+2),$$
где m и n — натуральные числа?

11.5. Можно ли выбрать число $n\geqslant 3$ и так заполнить таблицу $n\times(n+3)$ (n строк и $n+3$ столбца) различными натуральными числами от 1 до $n(n+3)$, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?