Материалы для проведения муниципального этапа

XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ В МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ

2018–2019 учебный год

2 декабря 2018 г.

Долгопрудный, 2018

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили члены региональной Методической комиссии по математике в Московской области к.ф.-м.н. Н. Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О. К. Подлипский (Московский физико-технический институт). Авторы задач — Н. Х. Агаханов и О. К. Подлипский. Задача 9.3 предложена П. А. Кожевниковым.

Рецензенты: к.ф.-м.н. И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Компьютерный макет подготовил А. И. Голованов.

Уважаемые коллеги!

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, при проверке работ оценивается:

– правильное решение в 7 баллов;
– решение с недочетами — в 5–6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — в 4 балла;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — в 2–3 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — в 1 балл.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Работа выполняется в течение 4 часов, учащимися 6 классов — 3 часов.

Вопросы по организации проведения олимпиады, ее содержанию и оценке работ участников можно задать 2 декабря 2018 г. с 9.30 до 18.30 по телефону (495) 408–76–66.

Согласно действующему Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, победителями муниципального этапа являются участники, набравшие наибольшее количество баллов. Важно отметить, что победителями и призерами олимпиады в каждой параллели (6–11 классов) могут стать несколько участников — возможно, набравших разное количество баллов.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний. . . »).

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4–5 баллов, второй шаг — в 2–3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 и 7 классов, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6–7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки.

Желаем успешной работы!

В 2018–2019 учебном году III (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области будет проведен 1 февраля (1 тур) и 2 февраля (2 тур) 2019 г. для учащихся 9–11 классов. Одновременно для учащихся 8 класса будет проведен региональный этап олимпиады Эйлера. Согласно Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, участниками регионального этапа являются:

– победители и призеры регионального этапа олимпиады предыдущего года;

– участники муниципального этапа олимпиады текущего года, набравшие необходимое для участия в региональном этапе количество баллов.

В соответствии с приказом Министерства образования Московской области оба тура региональной олимпиады пройдут на базе МФТИ в г. Долгопрудном и г. Жуковском. Муниципальное образование при сдаче заявки на участие выбирает место проведения (из двух) самостоятельно.

Условия и решения задач

6 класс

6.1. В числовом примере АБВ + 9 = ГДЕ буквы А, Б, В, Г, Д и Е обозначают шесть разных цифр. Какая цифра обозначена буквой Д?

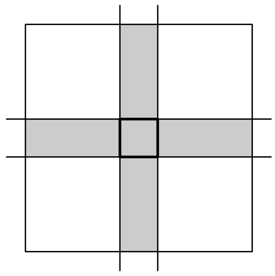
Ответ. 0.

Решение. При сложении вторая цифра первого слагаемого АБВ изменилась (Д вместо Б). Это могло быть только в том случае, когда из разряда единиц при сложении была перенесена 1 в разряд десятков. Но и первая цифра при сложении изменилась (Г вместо А). Значит, из разряда десятков при сложении в разряд сотен тоже перенесена единица. Это возможно только когда Б + 1 = 10. Значит, Б = 9, а тогда Д = 0.

Замечание. У ребуса есть решения, например, $194 + 9 = 203$.

Комментарий. Оценка не снижается, если найден правильный ответ, указано, что Б = 9, Д = 0, но подробных объяснений не приведено.

6.2. Прямые, параллельные сторонам квадрата, образуют квадратик, центр которого совпадает с центром исходного квадрата. Известно, что площадь креста, образованного квадратиком (см. рис. справа) в 17 раз больше площади квадратика. А во сколько раз площадь исходного квадрата больше площади квадратика?



Ответ. В 81 раз.

Решение. Пусть квадратик имеет размеры 1 см $\times$ 1 см, а квадрат — n см $\times$ n см. Тогда площадь креста равна $(2n - 1)$ см^2 (вертикальный столбик имеет размеры $n \times 1$, горизонтальная строка — $1 \times n$, а площадь квадратика мы сосчитали дважды). Из равенства $2n - 1 = 17$ получаем, что $n = 9$. Значит, площадь квадрата равна $9 \times 9 = 81$ см^2.

Комментарий. Верный ответ получен подбором — 5 баллов.

6.3. Мальчики принесли в класс конфеты и раздали их девочкам. Петя сказал, что он принёс ровно половину общего числа конфет. Коля сказал, что он принёс ровно треть общего числа конфет, и отдал свои конфеты только Маше и Тане, причём Маше досталось на 3 конфеты больше, чем Тане. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

Решение. Предположим, что оба мальчика не ошиблись. Поскольку Петя не ошибся, то общее количество принесённых конфет чётно (в два раза больше количества конфет, принесённых Петей). Треть от чётного числа — тоже чётное число. Значит, количество конфет, которые принёс Коля, чётно. Но, по его словам, он отдал девочкам нечётное количество конфет, так как количества конфет, доставшихся Маше и Тане, имеют разную чётность (различаются на 3), а сумма двух чисел разной чётности нечётна. Получили противоречие.

Комментарий. Замечено, что общее количество конфет должно быть чётным — 2 балла.

Показано, что из того, что общее количество конфет чётно, следует, что Коля принес чётное число конфет — 2 балла.

Замечено, что количества конфет, доставшихся Маше и Тане, имеют разную чётность — 2 балла.

6.4. Вася выписал на доску 999 произведений: $1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ \ldots,\ 999 \cdot 1000$. Верно ли, что сумма каких-то двух из этих произведений равна 20000?

Ответ. Верно.

Решение. Например, $99 \cdot 100 + 100 \cdot 101 = 100(99 + 101) = 100 \cdot 200 = 20000$.

Замечание. Ещё возможны только три примера: $54 \cdot 55 + 130 \cdot 131$, $40 \cdot 41 + 135 \cdot 136$, $89 \cdot 90 + 109 \cdot 110$.

Комментарий. Верный ответ без примера пар произведений — 0 баллов.

Любой верный пример — 7 баллов.

6.5. В комнате 10 человек — лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Первый сказал: «В этой комнате по крайней мере 1 лжец». Второй сказал: «В этой комнате по крайней мере 2 лжеца». Третий сказал: «В этой комнате по крайней мере 3 лжеца». И так далее до десятого, который сказал: «В этой комнате все лжецы». Сколько лжецов могло быть среди этих 10 человек?

Ответ. 5.

Решение. Пусть в комнате k лжецов. Тогда первые k человек сказали правду (и, следовательно, были рыцарями), а остальные $(10-k)$ соврали (и были лжецами). Значит, $k = 10 - k$, откуда $k = 5$.

Комментарий. Ответ получен рассмотрением примера — 3 балла.

7 класс

7.1. Расставьте по кругу 6 ненулевых цифр (не обязательно различных) так, чтобы каждая из них равнялась последней цифре суммы своих соседей.

Решение. Например, $-4-2-8-6-8-2-$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

7.2. Петя, Коля и Вася собирали грибы. Петя сказал, что он нашёл на 7 грибов меньше, чем суммарно нашли Коля и Вася, а Коля сказал, что он нашёл на 10 грибов меньше, чем суммарно нашли Петя и Вася. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

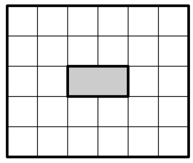
Первое решение. Предположим, что никто из ребят не ошибся. Раз Петя нашел на нечётное число 7 меньше грибов, чем Коля и Вася нашли вместе, то количество грибов, собранных Петей, и количество грибов, собранных вместе Колей и Васей — разной чётности. Но тогда общее число собранных грибов нечётно. Аналогично рассуждая, получаем, что количества грибов, собранных Колей, и Петей вместе с Васей — одной чётности. Но тогда общее количество собранных грибов чётно. Противоречие.

Второе решение. Пусть Петя нашел p грибов, Вася — v грибов, а Коля — k грибов. Тогда выполняются равенства $p = k + v - 7$, $k = p + v - 10$. Сложив эти равенства, получим $2v = 17$, что невозможно.

Комментарий. В предположении противного доказано только, что общее количество грибов чётно — 3 балла.

В предположении противного доказано только, что общее количество грибов нечётно — 3 балла.

7.3. Из клетчатого прямоугольника 6×5 вырезали в центре прямоугольник 2×1, как показано на рисунке. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на 6 треугольников?



Ответ. Можно.

Решение. Один из примеров разрезания показан на рис. 1.

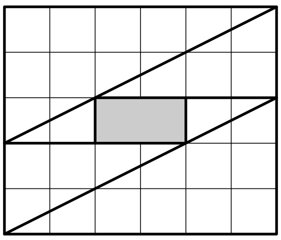


Рис. 1

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

7.4. В десятичной записи 13 чисел используется одна и та же цифра N и не используются никакие другие цифры. Может ли сумма этих чисел равняться 8900098?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что сумма могла равняться 8900098. У каждого из слагаемых одна и та же последняя цифра N. Значит, последняя цифра суммы равна последней цифре числа $13N$. Отсюда следует, что $N = 6$. Но тогда каждое из слагаемых делится на 6, то есть делится на 3. Следовательно, и сумма всех чисел делится на 3. Но по признаку делимости на 3 число 8900098 на 3 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что $N = 6$ — 3 балла.

7.5. По кругу стоят 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Каждый из стоявших сказал: «У меня есть сосед лжец». Найдите минимальное возможное число лжецов среди этих 100 человек.

Ответ. 34.

Решение. Заметим, что 3 рыцаря не могут стоять рядом, так в этом случае средний рыцарь солгал бы. Значит, среди любых 3 стоящих подряд человек есть лжец. Возьмем какого-нибудь лжеца, а остальных 99 человек разобьем на 33 тройки стоящих рядом. Так как в каждой тройке есть хотя бы один лжец, общее число лжецов в круге не меньше $1 + 33 = 34$.

Ровно 34 лжеца могут стоять, например, так: –Л(РЛР)(РЛР)... (РЛР)–.

Комментарий. Доказано только, что лжецов не меньше 34 — 4 балла.

Только приведён пример расстановки с 34 лжецами — 2 балла.

8 класс

8.1. Четырём девочкам дали конфеты. Маша сказала: «У нас с Катей на 12 конфет больше, чем у Лены с Олей», а Катя сказала: «У нас с Леной на 7 конфет меньше, чем у Маши с Олей». Докажите, что одна из девочек ошиблась.

Первое решение. Предположим, что ни одна из девочек не ошиблась. Тогда общее количество конфет у Маши с Катей такой же чётности, как общее количество конфет у Лены с Олей (они различаются на чётное число 12). Значит, общее количество конфет у всех четырёх девочек чётно. Аналогично рассуждая, получаем, что общее количество конфет у Кати с Леной противоположной чётности общему количеству конфет у Маши с Олей (они различаются на нечётное число 7). Значит, общее количество конфет у всех четырёх девочек нечётно. Противоречие.

Второе решение. Обозначим через c_M, c_K, c_L и c_O количества конфет у Маши, Кати, Лены и Оли, соответственно. Тогда из условия известно, что, если бы ни одна из девочек не ошиблась, то

$$\begin{cases} c_M + c_K = c_L + c_O + 12, \\ c_K + c_L = c_M + c_O - 7. \end{cases}$$

Сложив оба равенства, получим $2c_K - 2c_O - 5 = 0$. Заметив, что $2c_K$ и $2c_O$ чётны, а 5 нечётно, получаем противоречие.

Комментарий. В предположении противного доказано только, что общее количество конфет чётно — 3 балла.

В предположении противного доказано только, что общее количество конфет нечётно — 3 балла.

8.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля — треть, а Вася — пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что Вася не играл ни с Петей, ни с Колей?

Ответ. 30.

Решение. Из условия следует, что половина, треть и пятая часть от общего количества проведённых игр — целые числа. Поскольку наименьшее общее кратное знаменателей — чисел 2, 3, 5 — равно 30, то общее количество проведённых игр тоже кратно 30. Пусть оно равно $30p$. Тогда Петя сыграл $15p$, Коля — $10p$, Вася — $6p$ игр.

Пусть y — количество игр, сыгранных между собой Петей и Колей (это число равно 0 или 1), а z — количество игр, сыгранных без участия Пети, Коли и Васи. Тогда $15p+10p+6p-y+z = 30p$, то есть $p = y - z$. Единственное возможное положительное значение p равно 1, и оно достигается, когда $y = 1$, $z = 0$.

Замечание. Условие непротиворечиво: такая ситуация действительно могла иметь место (то есть можно провести 30 игр в соответствии с условием).

Комментарий. Доказано, что общее количество игр делится на 30 — 2 балла.

Приведён пример с 30 играми, но не обосновано, что других вариантов нет — 3 балла.

Приводить пример с 30 играми в решении не требуется (по условию известно, что такие игры были проведены).

8.3. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны соответственно точки D, E и F так, что $BE = BD$ и $AF = AD$. Известно, что ED — биссектриса угла BEF. Докажите, что FD — биссектриса угла AFE.

Решение. Из равенства сторон BE и BD треугольника DBE следует, что $\angle BDE = \angle BED$ (см. рис. 2). Но, по условию, $\angle FED = \angle BED$. Значит, $\angle FED = \angle BDE$. Это означает, что прямые BA и EF параллельны. Но тогда $\angle EFD = \angle ADF$. Кроме того, из равенства $AF = AD$ следует, что $\angle ADF = \angle AFD$. Значит, FD — биссектриса угла AFE. Утверждение доказано.

Комментарий. Доказано, что прямые BA и EF параллельны — 3 балла.

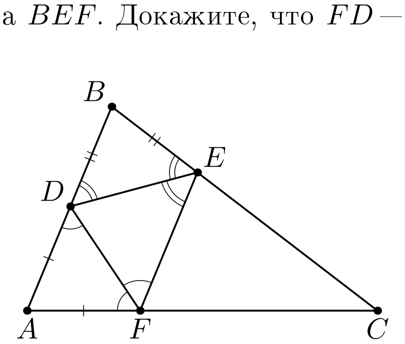


Рис. 2

8.4. Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?

Ответ. Не могла.

Решение. Предположим, что сумма произведений могла равняться 1001. Сумма двух чисел (в данном случае — этих произведений) бывает нечётной только когда одно из них чётно, а другое — нечётно. Значит, одно из произведений чётно, а другое — нечётно.

Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение нечётно, то оба числа должны быть нечётными, при этом одно из них должно давать остаток 1 при делении на 4, а другое — остаток 3 при делении на 4. Тогда остаток от деления их произведения на 4 равен $1 \cdot 3 = 3$.

Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение чётно, то оба числа должны быть чётными. Тогда их произведение даёт остаток 0 при делении на 4.

Таким образом, сумма двух произведений будет давать остаток 3 при делении на 4. Получили противоречие, так как 1001 даёт остаток 1 при делении на 4.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что в одной из пар оба числа чётны — 1 балл.

Доказано, что в этой паре произведение делится на 4 — 1 балл.

Доказано, что в одной из пар оба числа нечётны — 1 балл.

Доказано, что в этой паре произведение имеет остаток 3 при делении на 4 — 3 балла.

8.5. На шахматную доску 8×8 поставили k ладей и k коней так, что ни одна из фигур не бьёт никакую другую. При каком наибольшем k такое возможно?

Ответ. 5.

Решение. Из условия следует, что в одной строке (столбце) с ладьёй не может стоять никакая другая фигура.

Предположим, что на доску поставили 6 ладей. Тогда они стоят в 6 строках и 6 столбцах. Поэтому непобитых клеток останется всего 4 (стоящих на пересечении двух пустых строк и двух пустых столбцов). В эти клетки нельзя поставить 6 коней. Поэтому k не больше 5.

На рис. 3 показано, как поставить на доску 5 ладей и 5 коней так, чтобы они не били друг друга.

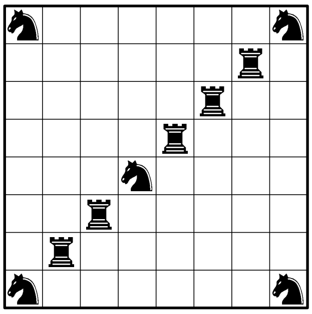


Рис. 3

Замечание. Существуют и другие примеры расстановки.

Комментарий. Доказано только, что k не больше 5 — 4 балла.

Приведён только пример расстановки 5 коней и 5 ладей — 3 балла.

9 класс

9.1. Даны положительные числа p и r. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — линейные функции с корнями p и r. Найдите все корни уравнения $f(x)g(x) = f(0)g(0)$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = p + r$.

Первое решение. Пусть данные функции имеют вид: $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$. Тогда уравнение принимает вид $(ax + b)(cx + d) - bd = 0$, то есть $x(acx + ad + bc) = 0$. Один корень этого уравнения $x_1 = 0$, а второй $x_2 = \frac{-ad - bc}{ac}$, то есть $x_2 = -\frac{d}{c} - \frac{b}{a}$. Осталось заметить, что $-\frac{d}{c}$ есть r, а $-\frac{b}{a}$ — это p.

Второе решение. Запишем наши функции в виде: $f(x) = a(x - p)$, $g(x) = c(x - r)$. Тогда уравнение принимает вид

$$ac(x - p)(x - r) - acpr = 0,$$

то есть $acx(x - p - r) = 0$, откуда и следует ответ.

Комментарий. Доказано только, что одним из корней является 0 — 2 балла.

Ответ зависит от переменных, не указанных в условии — баллы не добавляются.

9.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля — треть, а Вася — пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что по крайней мере в двух играх не участвовали ни Вася, ни Петя, ни Коля?

Ответ. 30.

Решение. Из условия следует, что половина, треть и пятая часть от общего количества проведённых игр — целые числа. Поскольку наименьшее общее кратное знаменателей — чисел 2, 3, 5 — равно 30, то общее количество проведённых игр тоже кратно 30. Пусть оно равно $30p$. Тогда Петя сыграл $15p$, Коля — $10p$, Вася — $6p$ игр. Пусть y — количество игр, сыгранных между собой Петей, Колей и Васей (это число равно 0, 1, 2 или 3), а z — количество игр, сыгранных без участия Пети, Коли и Васи ($z \geqslant 2$). Тогда $15p + 10p + 6p - y + z = 30p$, то есть $p = y - z$. Единственное возможное положительное значение p равно 1, и оно достигается, когда $y = 3, z = 2$.

Замечание. Условие непротиворечиво: такая ситуация действительно могла иметь место (то есть можно провести 30 игр в соответствии с условием).

Комментарий. Доказано, что общее количество игр делится на 30 — 2 балла.

Приведён пример с 30 играми, но не обосновано, что других вариантов нет — 3 балла.

Приводить пример с 30 играми в решении не требуется (по условию известно, что такие игры были проведены).

9.3. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O (B и C — точки касания). Пусть M — середина отрезка AO. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается прямой AC.

Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что угол OAC равен вписанному углу ABM (см. рис. 4). Но радиус OB перпендикулярен касательной AB, поэтому BM — медиана прямоугольного треугольника OBA. Значит $BM = \frac{AO}{2} = AM$, и потому $\angle ABM = \angle BAM = \angle BAO$. Но AO — биссектриса угла BAC, значит, $\angle BAO = \angle OAC$. Утверждение доказано.

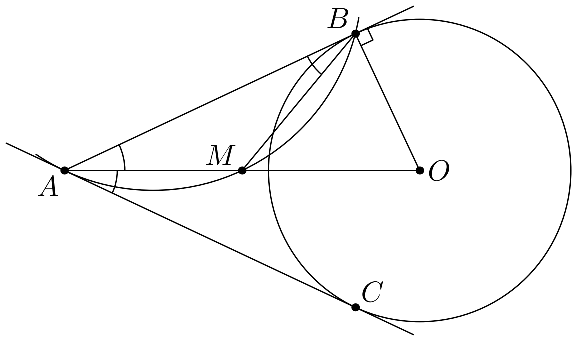


Рис. 4

Комментарий. Указано, какое равенство углов равносильно условию — 2 балла.

9.4. К числу A, состоящему из восьми ненулевых цифр, прибавили семизначное число, состоящее из одинаковых цифр, и получили восьмизначное число B. Оказалось, что число B может быть получено из числа A перестановкой некоторых цифр. На какую цифру может начинаться число A, если последняя цифра числа B равна 5?

Ответ. 5.

Решение. Так как числа A и B имеют одинаковую сумму цифр, то их разность делится на 9. Поэтому прибавленное семизначное число из одинаковых цифр делится на 9. Значит, оно состоит из девяток. То есть можно считать, что к числу A прибавили 10^7 и вычли 1. Это значит, что число B получается из числа A увеличением первой цифры на 1 и уменьшением последней цифры на 1 (так как в A нет нулей, а B восьмизначно), а остальные цифры не меняются. Так как число B может быть получено из числа A перестановкой некоторых цифр, то последняя цифра числа B совпадает с первой цифрой числа A (и наоборот). Поэтому число A может начинаться только на цифру 5.

Комментарий. Доказано, что прибавляемое число состоит из девяток — 2 балла.

Ответ получен рассмотрением примера — 1 балл.

9.5. На клетчатой доске 8×8 размещены 8 клетчатых кораблей размера 1×3 так, что ни у каких двух клеток, занятых разными кораблями, нет общих точек. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить хотя бы один корабль?

Ответ. 2 выстрелов.

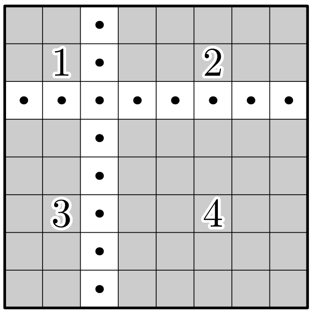


Рис. 5

Решение. Сделаем 2 выстрела так, как показано на рис. 5. Предположим, что мы не ранили ни один корабль. Тогда в области 1 кораблей нет. В каждой из областей 2 и 3 стоит не более 1 корабля. Значит, в области 4 стоит по крайней мере 6 кораблей.

Область 4 является квадратом 5×5. Тогда в этой области корабли, расположенные горизонтально, не могут лежать в соседних строках, а корабли, расположенные вертикально, не могут располагаться в соседних столбцах. Поэтому в этой области находится 3 «вертикальных» и 3 «горизонтальных» корабля, причем один из них лежит в центральной строке, а другой — в центральном столбце области. Но тогда оба этих корабля содержат центральную клетку области. Противоречие. Значит, по крайней мере один корабль ранен.

Покажем, что если сделан только один выстрел, то можно не ранить ни один корабль. Пусть выстрел был сделан в какую-то строку. Заметим, что в одной строке можно разместить два корабля. Тогда если выстрел сделан в строку с нечётным номером, по два корабля могли стоять в строках с номерами 2, 4, 6 и 8. Если же выстрел сделан в строку с чётным номером, по два корабля могли стоять в строках с номерами 1, 3, 5 и 7.

Замечание. Можно показать, что в области 4 нельзя расставить даже 5 кораблей.

Комментарий. Показано только, как за 2 выстрела ранить корабль — 4 балла.

Доказано только, что 1 выстрела может не хватить — 2 балла.

Приведён правильный пример двух выстрелов, но не объяснено, почему будет ранен хотя бы один корабль — 1 балл (вместо 4 баллов по первому критерию).

10 класс

10.1. Пусть $f(x) = x^2 + 2ax + b$. Известно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня. Докажите, что тогда при любом положительном k уравнение $f(x) + k(x+a)^2 = 0$ также имеет два корня.

Первое решение. По условию $a^2 - b > 0$. Пусть $F(x) = f(x) + k(x+a)^2$. Вычислим дискриминант нового трёхчлена $F(x)$. Имеем:

$$F(x) = x^2 + 2ax + b + k(x+a)^2 = (k+1)x^2 + 2a(k+1)x + (b + ka^2).$$

Значит,

$$\frac{1}{4}\,D_1 = a^2(k+1)^2 - (k+1)(b+ka^2) = (k+1)(a^2-b),$$

что доказывает утверждение задачи, поскольку $k+1>0$.

Второе решение. Перепишем исходный трёхчлен в виде $(x+a)^2 + (b-a^2)$. Его значение в вершине равно $b - a^2 < 0$. Новый трёхчлен есть

$$F(x) = (k+1)(x+a)^2 + (b-a^2),$$

причём его старший коэффициент положителен. Так как трёхчлен F в точке $x = -a$ принимает отрицательное значение $b - a^2$, то он имеет корни.

Комментарий. Замечено, что вершина новой параболы имеет абсциссу $-a$ — 2 балла.

10.2. Окружность, проходящая через вершины A, B, D трапеции $ABCD$, пересекает её боковую сторону CD в точке K. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BCK, касается прямой AB.

Решение. Пусть P — точка, лежащая на продолжении отрезка AB за точку B (см. рис. 6). Тогда утверждение задачи равносильно тому, что угол PBC равен вписанному углу CKB. Но углы CKB и DKB являются смежными, поэтому $\angle CKB = 180^\circ - \angle DKB$. С другой стороны, четырехугольник $DKBA$ — вписанный, поэтому $\angle DKB = 180^\circ - \angle DAB$. Наконец, из параллельности сторон AD и BC трапеции следует, что $\angle CBP = \angle DAB$. Утверждение доказано.

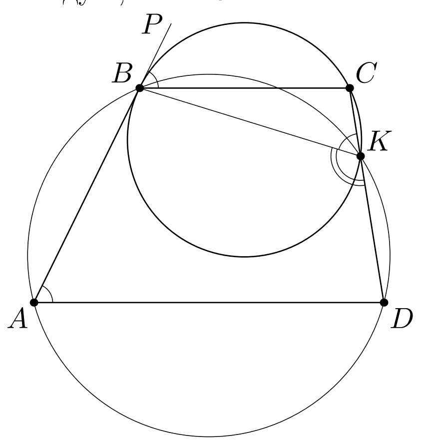


Рис. 6

Комментарий. Указано, какое равенство углов равносильно условию — 2 балла.

10.3. На клетчатой доске 8×8 размещён 1 клетчатый корабль размера 1×3. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить корабль?

Ответ. 4 выстрелов.

Решение. Сделаем 4 выстрела так, как показано на рис. 7. Тогда видно, что корабль гарантированно будет ранен. Покажем, что если сделано только 3 выстрела, то можно не ранить корабль. Пусть, например, в строки сделано не более одного выстрела. Тогда в любом столбце, в который не сделано выстрела, прострелено не более одной клетки, и поэтому в этом столбце может стоять корабль, который не будет ранен.

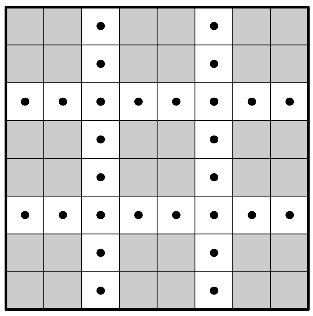


Рис. 7

Комментарий. Показано только, как за 4 выстрела ранить корабль — 3 балла.

Доказано только, что 3 выстрелов может не хватить — 3 балла.

Приведён правильный пример 4 выстрелов, но не объяснено, что будет ранен корабль — 1 балл (вместо 3 баллов по первому критерию).

10.4. Верно ли, что любое чётное число, большее 1000, можно представить в виде
$$n(n+1)(n+2) - m(m+1),$$
где m и n — натуральные числа?

Ответ. Неверно.

Решение. Заметим, что произведение трёх последовательных натуральных чисел $n(n+1)(n+2)$ делится на 3. Разберём несколько случаев.

Если m имеет остаток 0 или 2 при делении на 3, то $m(m+1)$ делится на 3. Значит, число $n(n+1)(n+2) - m(m+1)$ делится на 3.

Если m имеет остаток 1 при делении на 3, то $m(m+1)$ имеет остаток 2 при делении на 3. Значит, число $n(n+1)(n+2) - m(m+1)$ имеет остаток 1 при делении на 3.

Это означает, что число $n(n+1)(n+2) - m(m+1)$ не может иметь остаток 2 при делении на 3. То есть, например, число 1004 в требуемом виде представить не удастся.

Комментарий. Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

Доказано, что разность произведений не может иметь остаток 2 при делении на 3, но не приведён пример конкретного числа, которое не представимо в нужном виде — баллы не снимаются.

10.5. Можно ли выбрать число $n \geqslant 3$ и так заполнить таблицу $n \times n$ различными натуральными числами от 1 до n^2, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что таблицу удалось заполнить требуемым образом. Рассмотрим в каждой строке три числа: два множителя и их произведение. Отметим в каждой строке наименьший множитель. Так как строк n, то всего наименьших множителей n. А так как они различны, то среди них найдётся такой, который не меньше n. Но тогда в строке, где находится этот множитель, второй множитель будет не меньше $n+1$. Поэтому их произведение не меньше $n(n+1) > n^2$. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

11 класс

11.1. Известно, что
$$\sin x \cos y = \cos x \sin y = \frac{1}{2}.$$
Найдите $\cos 2x - \sin 2y$.

Ответ. -1 или 1.

Первое решение. Перемножив данные равенства и умножив произведение на 4, получаем $\sin 2x \sin 2y = 1$. Отсюда $\sin 2x = \sin 2y = 1$ или $\sin 2x = \sin 2y = -1$ (оба случая возможны; достаточно взять $x = y = \frac{\pi}{4}$ или $x = y = \frac{3\pi}{4}$). В обоих случаях $\cos 2x = 0$. Тогда $\cos 2x - \sin 2y = -1$ или $\cos 2x - \sin 2y = 1$.

Второе решение. Из условия имеем
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = 1$$
и, аналогично, $\sin(x-y) = 0$. Тогда $x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x - y = \pi\ell$ при целых k и ℓ. Но тогда $2x = (x+y) + (x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi(2k+\ell)$, откуда $\cos 2x = 0$, а $2y = (x+y) - (x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi(2k-\ell)$, откуда $\sin 2y = \pm 1$. Значит, $\cos 2x - \sin 2y = \mp 1$. Те же примеры показывают, что оба ответа возможны.

Комментарий. Потерян один из ответов — снять 2 балла.

Без обоснования приведены примеры углов, дающих оба ответа — 2 балла.

Без обоснования приведён пример углов, дающих один ответ — 0 баллов.

11.2. Числа x и y удовлетворяют неравенству $x > y > \frac{2}{x-y}$. Докажите, что $x^2 > y^2 + 4$.

Решение. Сложив неравенства $x > \frac{2}{x-y}$ и $y > \frac{2}{x-y}$, получаем, что $x + y > \frac{4}{x-y}$.

Из условия $x > y$ следует, что знаменатель дробей положителен, поэтому на него можно умножить без изменения знака неравенства. Тогда получаем: $(x+y)(x-y) > 4$, то есть $x^2 - y^2 > 4$. Утверждение доказано.

Замечание. Число 4 нельзя заменить на большее, поскольку при $0 < \varepsilon < 1$, $x = 2/\varepsilon + 2\varepsilon$ и $y = 2/\varepsilon + \varepsilon$ имеем
$$x > y = \frac{2}{\varepsilon} + \varepsilon > \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2}{x-y},$$
но при этом
$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = \varepsilon\left(\frac{4}{\varepsilon} + 3\varepsilon\right) = 4 + 3\varepsilon^2,$$
что может быть сколь угодно близким к 4 при достаточно малых ε.

Комментарий. При домножении на $x - y$ не отмечено, что $x - y > 0$ — снять 1 балл.

11.3. Около основания n-угольной пирамиды можно описать окружность. Известно, что центр этой окружности равноудалён от всех середин боковых рёбер пирамиды. Докажите, что длины всех боковых рёбер пирамиды равны.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около основания $A_1A_2\ldots A_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$, точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — соответственно середины боковых рёбер $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$ (см. рис. 8). Как известно, все точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ лежат в одной плоскости (эта плоскость параллельна основанию и равноудалена от основания и вершины пирамиды). Обозначим её через α.

Пусть Q — точка пересечения луча SO с плоскостью α. Тогда QM_k, $k = 1, \ldots, n$ — средние линии треугольников SOA_k, и потому при всех $k = 1, \ldots, n$ имеем: $QM_k = \frac{R}{2}$, где R — радиус окружности, описанной около основания пирамиды. Значит, Q — точка, равноудалённая от вершин многоугольника $M_1M_2\ldots M_n$, то есть является центром окружности, описанной около многоугольника $M_1M_2\ldots M_n$. Пусть OH — перпендикуляр, проведённый из точки O к плоскости α. Тогда из равенства прямоугольных треугольников OHM_k, $k = 1, \ldots, n$ (они равны, поскольку катет OH у них общий, а гипотенузы OM_k равны по условию), следует, что и точка H — центр описанной окружности многоугольника $M_1M_2\ldots M_n$. Значит, точки Q и H совпадают. Это означает, что SO — высота пирамиды. Но тогда из равенства прямоугольных треугольников SOA_k, $k = 1, \ldots, n$, следует равенство боковых сторон пирамиды.

Замечание. Ошибочным является такое рассуждение: треугольники OM_1A_1 и OM_nA_n рав-

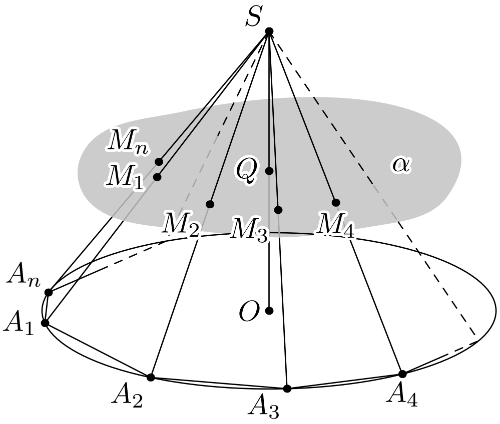


Рис. 8

ны по двум сторонам ($OM_1 = OM_n$ и $OA_1 = OA_n$) и равным высотам (высоты, проведённые из точек M_1 и M_n, равны, поскольку они равны половине длины высоты пирамиды). Здесь ошибка заключается в том, что высоты этих треугольников вовсе не обязательно равны расстояниям от M_1 и M_n до основания.

Комментарий. В решении без доказательства используется то, что SO есть высота пирамиды — не более 2 баллов за задачу.

11.4. Верно ли, что любое делящееся на 6 число, большее 1000, можно представить в виде

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - m(m+1)(m+2),$$

где m и n — натуральные числа?

Ответ. Неверно.

Решение. Заметим, что произведение пяти последовательных натуральных чисел $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 5. Разберём несколько случаев.

Если m имеет остаток 0, 3 или 4 при делении на 5, то $m(m+1)(m+2)$ делится на 5.

Если m имеет остаток 1 при делении на 5, то $m(m+1)(m+2)$ имеет остаток 1 при делении на 5.

Если m имеет остаток 2 при делении на 5, то $m(m+1)(m+2)$ имеет остаток 4 при делении на 5.

Значит, число $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - m(m+1)(m+2)$ может иметь при делении на 5 только остатки 0, 1, 4. То есть, например, число 1002 в требуемом виде представить не удастся.

Комментарий. Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

Доказано, что разность произведений не может иметь остаток 2 (или 3) при делении на 5, но не приведён пример конкретного числа, которое не представимо в нужном виде — баллы не снимаются.

11.5. Можно ли выбрать число $n \geqslant 3$ и так заполнить таблицу $n \times (n+3)$ (n строк и $n+3$ столбца) различными натуральными числами от 1 до $n(n+3)$, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что таблицу удалось заполнить требуемым образом. Рассмотрим в каждой строке три числа: два множителя и их произведение. Отметим в каждой строке наименьший множитель. Заметим, что множитель не может равняться 1, так как в этом случае в строке оказались бы одинаковые числа. Так как строк n, то всего наименьших множителей n. А так как они различны, то среди них найдётся такой, который не меньше $n+1$. Но тогда в строке, где находится этот множитель, второй множитель будет не меньше $n+2$. Поэтому их произведение не меньше

$$(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 > n^2 + 3n = n(n+3).$$

Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

Замечено, что множитель не может равняться 1 — 2 балла.

Доказано только, что в одной из строк произведение не меньше $n(n+1)$ — 2 балла.